（共通テスト対策⑧）

問題 3つの変量 x, y, z について，n 個の x, y, z の値の組として，次のようなデータが得られているとする。

$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x_2,\ y_2,\ z_2)$, ……, $(x_n,\ y_n,\ z_n)$

ただし，$x_i=i$, $y_i=i^2$, $z_i=2^i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

このとき，変量 y のデータの平均値 $\overline{y}$ は $\dfrac{1}{6}\times{}^{ア}\boxed{}$ であり，変量 z のデータの平均値 $\overline{z}$ は $\dfrac{2}{n}\times{}^{イ}\boxed{}$ である。

変量 x のデータの分散 $s_x{}^2$ は $\dfrac{1}{12}\times{}^{ウ}\boxed{}$ であり，変量 z のデータの分散 $s_z{}^2$ は $\dfrac{4(2^n-1)}{3n^2}\times{}^{エ}\boxed{}$ である。

変量 x と変量 y のデータの共分散 s_{xy} は $\dfrac{1}{12}\times{}^{オ}\boxed{}$ であり，変量 x と変量 z のデータの共分散 s_{xz} は

$\dfrac{1}{n}\times{}^{カ}\boxed{}$ である。

解答 $\overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^2=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\dfrac{1}{6}\times{}^{ア}(n+1)(2n+1)$

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^i=\frac{1}{n}\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}=\frac{2}{n}\times{}^{イ}(2^n-1)$$

変量 x のデータの平均値を $\overline{x}$ とすると

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)$$

よって
$$s_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-(\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^2-(\overline{x})^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}(n+1)^2$$
$$=\frac{1}{12}(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\}=\frac{1}{12}\times{}^{ウ}(n+1)(n-1)$$

また
$$s_z{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i{}^2-(\overline{z})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}4^i-(\overline{z})^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{4(4^n-1)}{4-1}-\frac{2^2}{n^2}(2^n-1)^2$$
$$=\frac{4n(4^n-1)-12(2^n-1)^2}{3n^2}=\frac{4n(2^n-1)(2^n+1)-12(2^n-1)^2}{3n^2}$$
$$=\frac{4(2^n-1)}{3n^2}\{n(2^n+1)-3(2^n-1)\}=\frac{4(2^n-1)}{3n^2}\times{}^{エ}\{(n-3)\cdot2^n+n+3\}$$

更に
$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-x_i\overline{y}-\overline{x}y_i+\overline{x}\cdot\overline{y})$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\overline{x}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i+\overline{x}\cdot\overline{y}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^3-\overline{x}\cdot\overline{y}-\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{y}=\frac{1}{4}n(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)\cdot\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{12}(n+1)^2\{3n-(2n+1)\}=\frac{1}{12}\times{}^{オ}(n+1)^2(n-1)$$

同様にして

$$s_{xz}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(z_i-\overline{z})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_iz_i-x_i\overline{z}-\overline{x}z_i+\overline{x}\cdot\overline{z})$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iz_i-\overline{z}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\overline{x}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i+\overline{x}\cdot\overline{z}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^i-\overline{x}\cdot\overline{z}-\overline{x}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^i-\overline{x}\cdot\overline{z}$$

ここで，$\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^i=T$ とおくと

$$T=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots\cdots+n\cdot 2^n$$

$$2T=\qquad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$$

両辺の差をとると

$$-T=2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$$

よって　$T=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

ゆえに　$s_{xz}=\frac{1}{n}\{(n-1)\cdot 2^{n+1}+2\}-\frac{1}{2}(n+1)\cdot\frac{2}{n}(2^n-1)$

$$=\frac{1}{n}\{(n-1)\cdot 2^{n+1}+2-(n+1)(2^n-1)\}$$

$$=\frac{1}{n}[\{2(n-1)-(n+1)\}\cdot 2^n+2+(n+1)]=\frac{1}{n}\times{}^{\text{カ}}\{(n-3)\cdot 2^n+n+3\}$$