（入試演習）　　　　　　三角関数③

問題　n を自然数，θ を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos(n+2)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta+\cos n\theta=0$ を示せ。

(2)　$\cos\theta=x$ とおくとき，$\cos 5\theta$ を x の式で表せ。

(3)　$\cos^2\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めよ。

解答　(1)　$2\cos(n+1)\theta\cos\theta=\cos\{(n+1)\theta+\theta\}+\cos\{(n+1)\theta-\theta\}$

$$=\cos(n+2)\theta+\cos n\theta$$

よって　$\cos(n+2)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta+\cos n\theta=0$

(2)　(1) から　$\cos(n+2)\theta=2\cos\theta\cos(n+1)\theta-\cos n\theta$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2x^2-1$ であるから

$$\cos 3\theta=2\cos\theta\cos 2\theta-\cos\theta=2x(2x^2-1)-x$$
$$=4x^3-3x$$

$$\cos 4\theta=2\cos\theta\cos 3\theta-\cos 2\theta=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)$$
$$=8x^4-8x^2+1$$

よって　$\cos 5\theta=2\cos\theta\cos 4\theta-\cos 3\theta=2x(8x^4-8x^2+1)-(4x^3-3x)$

$$=16x^5-20x^3+5x$$

参考　$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta=4x^3-3x$ としてもよい。

(3)　$\cos\dfrac{\pi}{10}=x$ とすると，求めるものは x^2 の値である。

(2) から　$16x^5-20x^3+5x=\cos\left(5\cdot\dfrac{\pi}{10}\right)$

すなわち　$16x^5-20x^3+5x=0$　　よって　$x(16x^4-20x^2+5)=0$

$x\neq 0$ であるから　$16x^4-20x^2+5=0$　　ゆえに　$x^2=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}$

ここで，$0<\dfrac{\pi}{10}<\dfrac{\pi}{6}$ から　$\cos^2\dfrac{\pi}{6}<\cos^2\dfrac{\pi}{10}<\cos^2 0$　　よって　$\dfrac{3}{4}<x^2<1$

$\sqrt{5}<3$ から　$\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}<\dfrac{5+3}{8}=1$

また　$\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{8}>0$，　$\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{8}<0$

ゆえに，$\dfrac{3}{4}<x^2<1$ を満たす x^2 の値は　$x^2=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$

よって，求める値は　$\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$