（入試演習）　　　　　　　　速度

$\boxed{\text{問題}}$ xy 平面上を運動する点Pの時刻 $t\,(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が　$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点をOとし，時刻 t におけるPの速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行になるような $t\,(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。

$\boxed{\text{解答}}$ (1)　$t^2>0$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{(t^2\cos t)^2+(t^2\sin t)^2}=\sqrt{t^4}=t^2$$

また，$\dfrac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$ であるから

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2t\cos t-t^2\sin t)^2+(2t\sin t+t^2\cos t)^2}$$

$$=\sqrt{t^4+4t^2}=t\sqrt{t^2+4}$$

さらに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=t^2\cos t(2t\cos t-t^2\sin t)+t^2\sin t(2t\sin t+t^2\cos t)=2t^3$

よって　$\cos\theta(t)=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\cos\theta(t)=0$

$0\leqq\theta(t)\leqq\pi$ であるから　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}$

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行であるから　$\dfrac{dx}{dt}=0$　　よって　$2t\cos t=t^2\sin t$

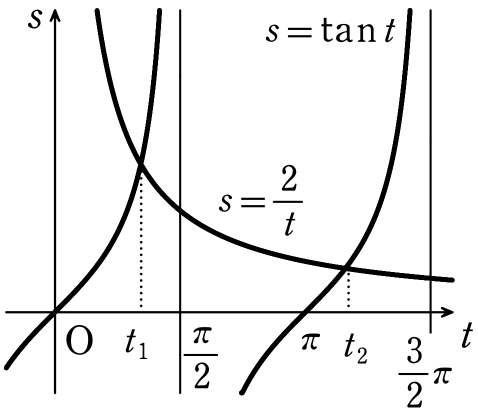
$t>0$ であるから　$2\cos t=t\sin t$　……①

$\cos t=0$ のとき，$\sin t=\pm1$ から，①の右辺は0でない。

よって，$\cos t\neq0$ であるから　$\dfrac{2}{t}=\tan t$　……②

$s=\dfrac{2}{t}$，$s=\tan t$ のグラフを ts 平面上にかくと，

右の図のようになる。



t_1，t_2 はともに②の解で

$$0<t_1<\frac{\pi}{2},\quad \pi<t_2<\frac{3}{2}\pi$$

$0<t_1<\dfrac{\pi}{2}$ から　$\pi<t_1+\pi<\dfrac{3}{2}\pi$

したがって，$t_1+\pi$，t_2 はともに $\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi$ の範囲にある。

ここで，$\tan(t_1+\pi)-\tan t_2=\tan t_1-\tan t_2=\dfrac{2}{t_1}-\dfrac{2}{t_2}>0$ であり，

$s=\tan t\left(\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi\right)$ は単調に増加するから　$t_1+\pi>t_2$　よって　$t_2-t_1<\pi$