媒介変数と図形の面積（応用編 ①）

媒介変数によって描かれる図形の面積を求める問題は、数Ⅲの頻出問題の1つです。今回はそれをテーマに勉強します。

問題 次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt$ を求めよ。

(2) xy 平面上の曲線 $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$ （$0\leqq t\leqq \pi$ ）と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

解答

(1) 勿論、部分積分で求めますね。

$$\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt=\int_0^k(-e^{-t})'(\cos t-\sin t)\,dt=\Big[-e^{-t}(\cos t-\sin t)\Big]_0^k-\int_0^k(-e^{-t})(-\sin t-\cos t)\,dt$$

$$=-e^{-k}(\cos k-\sin k)-\{(-e^0)(\cos 0-\sin 0)\}-\int_0^k e^{-t}(\sin t+\cos t)\,dt$$

$$=-e^{-k}(\cos k-\sin k)+1-\int_0^k(-e^{-t})'(\sin t+\cos t)\,d$$

$$=-e^{-k}(\cos k-\sin k)+1+\Big[e^{-t}(\sin t+\cos t)\Big]_0^k+\int_0^k(-e^{-t})(\cos t-\sin t)\,dt$$

$$2\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt=-e^{-k}(\cos k-\sin k)+1+e^{-k}(\sin k+\cos k)-e^0(\sin 0+\cos 0)$$

$$=2e^{-k}\sin k$$

よって $\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt=e^{-k}\sin k$

(2) 面積を求めるために、まず図形の概略が必要ですね。そのためには微分して増減表を書く必要があります。

$0<t<\pi$ において 与式より $\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}(\sin t+\cos t)$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=-e^{-t}(\sin t-\cos t)$$

$\dfrac{dx}{dt}=0$ とおいて解くと $-e^{-t}<0$ より $\sin t+\cos t=0$ これを合成して

$\sqrt{2}\left(\sin t\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos t\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.$ つまり $\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ これを $\dfrac{\pi}{4}<t+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5}{4}\pi$ で解くと

$t+\dfrac{\pi}{4}=\pi \qquad \therefore t=\dfrac{3}{4}\pi$

また、$\dfrac{dy}{dt}=0$ とおいて解くと $-e^{-t}<0$ より $\sin t-\cos t=0$ これを合成して

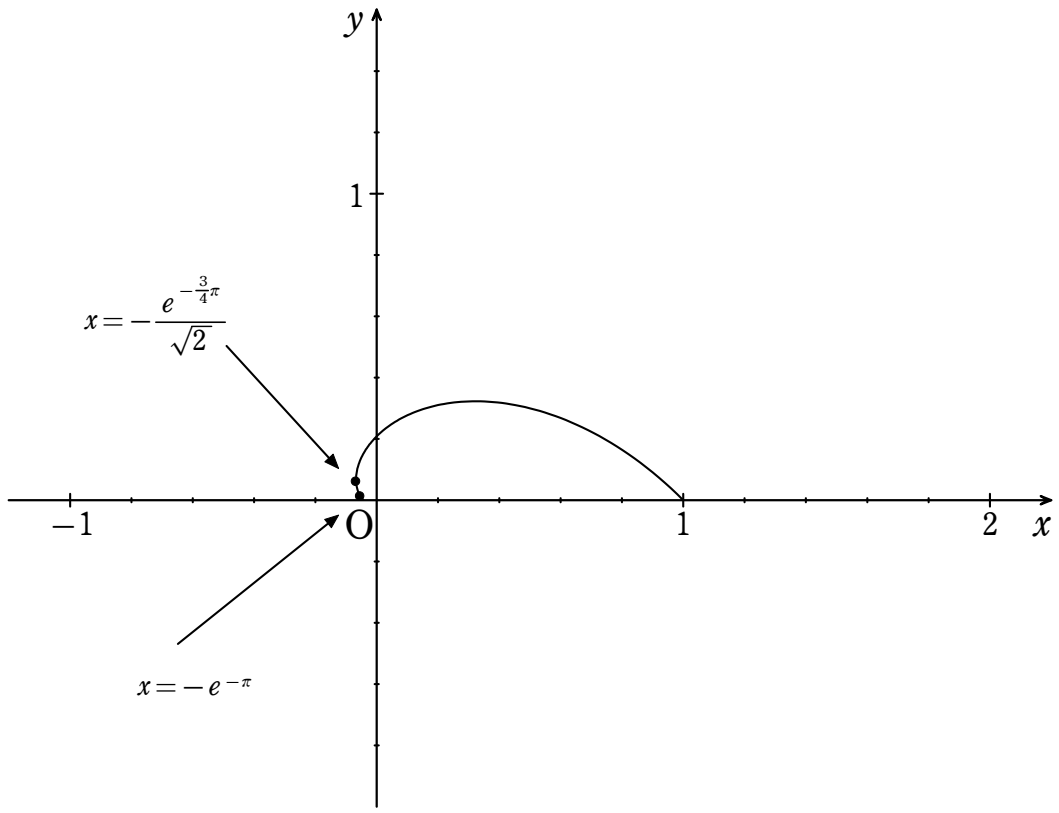
$\sqrt{2}\left(\sin t\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\cos t\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.$ つまり $\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ これを $-\dfrac{\pi}{4}<t-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ で解くと

$t-\dfrac{\pi}{4}=0 \qquad \therefore t=\dfrac{\pi}{4}$

このとき、増減表は以下のようになる。

媒介変数と図形の面積（応用編 ①）

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$	/
x	1	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	$\rightarrow$	$-e^{-\pi}$
$\frac{dy}{dt}$	/	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/
y	0	$\uparrow$	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	0
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$	/	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	/



グラフより、求める面積をSとし、$-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$ における上部のグラフを y_1、$-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq -e^{-\pi}$ における下部のグラフを y_2 とすると

$$S=\int_{-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}}^{1} y_1 dx-\int_{-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}}^{-e^{-\pi}} y_2 dx=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} e^{-t}\sin t\frac{dx}{dt}dt-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-t}\sin t\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} e^{-t}\sin t\{-e^{t}(\sin t+\cos t)\}dt-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-t}\sin t\{-e^{t}(\sin t+\cos t)\}dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{3}{4}\pi} e^{-t}\sin t\{e^{-t}(\sin t+\cos t)\}dt+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-t}\sin t\{(\sin t+\cos t)\}dt$$

$$=\int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\sin^{2}t+\sin t\cos t)dt=\int_{0}^{\pi} e^{-2t}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}+\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t)dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}dt$$

$\int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t)dt$　について、　$2t=s$ とおくと、$\frac{dt}{ds}=2$　また、

t	$0\to\pi$
s	$0\to 2\pi$

　このとき

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t)dt=-\int_{0}^{2\pi} e^{-s}(\cos s-\sin s)ds=-e^{-2\pi}\sin 2\pi=0$$

また、$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_{0}^{\pi}=-\frac{e^{-2\pi}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1-e^{-2\pi}}{4}$

よって　　$S=\frac{1-e^{-2\pi}}{4}$