（入試演習）　平均値の定理と不等式

問題　e を自然対数の底とする。

(1)　$0 \leqq a \leqq b$ に対して，不等式 $a + e^{-a} \leqq b + e^{-b}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ に対して，不等式 $|e^{-a} - e^{-b}| \leqq |a-b|$ が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{x_n\}$ を，$x_1 = 0$，$x_{n+1} = \dfrac{e^{-x_n}}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定める。また，方程式 $x = \dfrac{e^{-x}}{2}$ の解を α（α は実数）とする。このとき，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，不等式　$|x_{n+1} - \alpha| \leqq \dfrac{1}{2}|x_n - \alpha|$ が成り立つことを示せ。

(4)　(3) の数列 $\{x_n\}$ について，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$|x_n - \alpha| \leqq \dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$ が成り立つことを示せ。

解答　(1)　$f(x) = x + e^{-x}$ とおくと，$x > 0$ で　　$f'(x) = 1 - e^{-x} > 0$

よって，$f(x)$ は $x > 0$ で単調に増加する。

ゆえに，$0 \leqq a \leqq b$ に対して，$f(a) \leqq f(b)$，すなわち，$a + e^{-a} \leqq b + e^{-b}$ が成り立つ。

(2)　(1) から，$0 \leqq a \leqq b$ に対して，$e^{-a} - e^{-b} \leqq b - a$ が成り立つ。

$0 \leqq a \leqq b$ より，$e^{-a} - e^{-b} \geqq 0$，$b - a \geqq 0$ であるから

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leqq |a-b| \qquad \text{が成り立つ。}$$

同様にして，$0 \leqq b \leqq a$ に対して，$|e^{-a} - e^{-b}| \leqq |a-b|$ が成り立つ。

したがって，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ に対して，$|e^{-a} - e^{-b}| \leqq |a-b|$ が成り立つ。

(3)　$x_1 = 0$ で，$n \geqq 2$ のとき $x_n = \dfrac{e^{-x_{n-1}}}{2} > 0$ であるから，すべての自然数 n について　　$x_n \geqq 0$

よって，$\alpha = \dfrac{e^{-\alpha}}{2}$，$x_{n+1} = \dfrac{e^{-x_n}}{2}$ であるから　　$|x_{n+1} - \alpha| = \left| \dfrac{e^{-x_n}}{2} - \dfrac{e^{-\alpha}}{2} \right|$

(2) より，$\left|e^{-x_n} - e^{-\alpha}\right| \leqq |x_n - \alpha|$ が成り立つから

$$|x_{n+1} - \alpha| = \frac{1}{2}\left|e^{-x_n} - e^{-\alpha}\right| \leqq \frac{1}{2}|x_n - \alpha|$$

したがって，すべての自然数 n について，$|x_{n+1} - \alpha| \leqq \dfrac{1}{2}|x_n - \alpha|$ が成り立つ。

参考　方程式 $x = \dfrac{e^{-x}}{2}$ が実数解をもつことは次のように示すことができる。

$g(x) = x - \dfrac{e^{-x}}{2}$ とおくと，$x > 0$ で　　$g'(x) = 1 + \dfrac{e^{-x}}{2} > 0$

よって，$g(x)$ は $x > 0$ で単調に増加する。

$g(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$，$g(1) = 1 - \dfrac{1}{2e} > 0$ であるから　　$g(\alpha) = 0$，$0 < \alpha < 1$　　を満たす実数 α が存在する。

したがって，方程式 $x = \dfrac{e^{-x}}{2}$ は実数解をもつ。

(4)　(3) から，$n \geqq 2$ に対して

$$|x_n - \alpha| \leqq \frac{1}{2}|x_{n-1} - \alpha| \leqq \cdots\cdots \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1 - \alpha|$$

が成り立つ。

$x_1=0$ であるから　　$|x_n-\alpha| \leqq \dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$

これは，$n=1$ でも成り立つ。

したがって，すべての自然数 n に対して，$|x_n-\alpha| \leqq \dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$ が成り立つ。