f(s＋t) , f(s) , f(t)の関係式で与えられた微分の問題

　次の問題は毎年のように入試で出題されている重要問題です。きっと模試や本番で出会うことになるでしょうから、確実にマスターしてください。

問題　関数 $f(x)$ は全ての実数 s , t に対して　$f(s+t)=f(s)e^t+f(t)e^s$ を満たし、さらに $x=0$ で微分可能で、$f'(0)=1$ とする。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ は全ての実数 x で微分可能であることを、微分の定義に従って示せ。更に $f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

(4) 関数 $g(x)$ を $g(x)=f(x)e^{-x}$ で定める。 $g'(x)$ を計算して、関数 $f(x)$ を求めよ。　　　（東京理科大）

解答

(1) $f(s+t)=f(s)e^t+f(t)e^s$ に $s=t=0$ を代入し、 $f(0)=f(0)e^0+f(0)e^0$ 　　$e^0=1$ だから、 $f(0)=2f(0)$

　$\therefore\ f(0)=0$

(2) (1) の結果を利用すると　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=1$

(3) 微分の定義は $\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ であるから、 まず、$f(s+t)=f(s)e^t+f(t)e^s$ の s に x を t に h を代入し、 $f(x+h)=f(x)e^h+f(h)e^x$ となる。 この両辺から $f(x)$ を引いて、 $f(x+h)-f(x)=f(x)(e^h-1)+f(h)e^x$

両辺をh で割って、 $\displaystyle\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\cdot\frac{e^h-1}{h}+e^x\cdot\frac{f(h)}{h}$ 　　両辺の $h\to 0$ とする極限をとって

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}+e^x\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ 　　ところで、 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-e^0}{h-0}$ で、これは

$k(x)=e^x$ とおいたときの $k'(0)$ のことであるから、 $k'(x)=e^x$ より、 $k'(0)=1$ 　また、 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$ だから

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}+e^x\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ より $f'(x)=f(x)+e^x$ 　となる。つまり、 関数 $f(x)$ は全ての実数 x で微分可能であると言える。

(4) $g(x)=f(x)e^{-x}$ より、 $g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}$ 　これに $f'(x)=f(x)+e^x$ を代入し

$g'(x)=\{f(x)+e^x\}e^{-x}-f(x)e^{-x}=e^0=1$ となる。よって、 $g(x)=x+C$ （Cは積分定数）とおけ、

$g(x)=f(x)e^{-x}$ より　$x+C=f(x)e^{-x}$ 　となる。これに $x=0$ を代入すると $C=f(0)e^0$となり、 $f(0)=0$ であることより　$C=0$ となる。　このとき　$x=f(x)e^{-x}$ となり、両辺に e^x をかけると　$f(x)=xe^x$ となる。