（入試演習）　積分の応用と極限

問題　$t>0$ とする。曲線 $y=e^x$ を C とし，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線を ℓ とする。曲線 C と y 軸の交点を Q とし，また直線 ℓ と y 軸との交点を R とする。曲線 C と直線 ℓ，および y 軸で囲まれた図形の面積を S とし，$\angle\mathrm{PRQ}=\theta$ とする。

(1)　点 R の y 座標を求めよ。

(2)　$t=2$ のとき，S の値を求めよ。

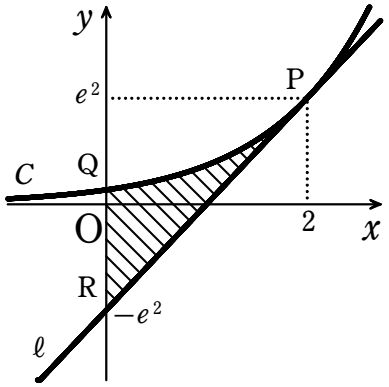
(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S\tan\theta}{t^2}$ を求めよ。

解答　(1)　$y'=e^x$ であるから，曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

すなわち　　$y=e^tx-te^t+e^t$

よって，点 R の y 座標は　　$-te^t+e^t$



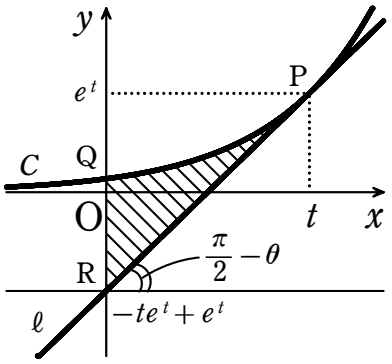
(2)　$t=2$ のとき，直線 ℓ の方程式は　　$y=e^2x-e^2$

よって，求める面積 S は右の図の斜線部分の面積であるから

$$S=\int_0^2\{e^x-(e^2x-e^2)\}dx$$

$$=\left[e^x-\frac{e^2}{2}x^2+e^2x\right]_0^2=e^2-1$$

(3)　面積 S は右の図の斜線部分の面積であるから



$$S=\int_0^t\{e^x-(e^tx-te^t+e^t)\}dx$$

$$=\left[e^x-\frac{e^t}{2}x^2+te^tx-e^tx\right]_0^t$$

$$=\left(\frac{1}{2}t^2-t+1\right)e^t-1$$

また，直線 ℓ の傾きは e^t であるから

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=e^t\qquad\text{よって}\qquad\tan\theta=e^{-t}$$

したがって

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S\tan\theta}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left\{\left(\frac{1}{2}t^2-t+1\right)e^t-1\right\}\cdot e^{-t}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2e^t}\right)=\frac{1}{2}$$