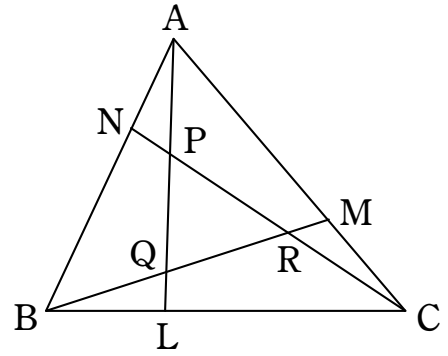


## (共通テスト対策 ⑭)

**問題**  $\triangle ABC$  の辺  $BC$  上に点  $L$ , 辺  $CA$  上に点  $M$ , 辺  $AB$  上に点  $N$  をとる。また, 線分  $AL$  と  $CN$  の交点を  $P$ , 線分  $AL$  と  $BM$  の交点を  $Q$ , 線分  $BM$  と  $CN$  の交点を  $R$  とする。

$AN : NB = BL : LC = CM : MA = 1 : 2$  であるとき

- (1)  $AP : PL$  を求めよ。
- (2)  $PQ : QL$  を求めよ。
- (3)  $\triangle PQR$  の面積を  $S_1$ ,  $\triangle ABC$  の面積を  $S_2$  とするとき,  $S_1 : S_2$  を求めよ。



**解答** (1)  $\triangle ABL$  と直線  $CN$  について, メネラウスの定理により  $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BC}{CL} \cdot \frac{LP}{PA} = 1$

すなわち  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{PL}{AP} = 1$  よって  $AP : PL = 3 : 4$  ……①

(2)  $\triangle ACL$  と直線  $BM$  について, メネラウスの定理により  $\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CB}{BL} \cdot \frac{LQ}{QA} = 1$

すなわち  $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{QL}{AQ} = 1$  よって  $AQ : QL = 6 : 1$  ……②

$AL = a$  とすると, ①から  $AP = \frac{3}{7}a$ ,  $PL = \frac{4}{7}a$

②から  $AQ = \frac{6}{7}a$ ,  $QL = \frac{1}{7}a$

ゆえに,  $PQ = AQ - AP = \frac{3}{7}a$  であるから  $PQ : QL = \frac{3}{7}a : \frac{1}{7}a = 3 : 1$

(3) (1), (2) から  $AP : PQ : QL = 3 : 3 : 1$

同様に  $BQ : QR : RM = CR : RP : PN = 3 : 3 : 1$

よって  $\triangle QAB = \frac{BQ}{BM} \cdot \triangle ABM = \frac{3}{7} \cdot \frac{AM}{AC} \cdot \triangle ABC = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} S_2 = \frac{2}{7} S_2$

同様に  $\triangle RBC = \frac{2}{7} S_2$ ,  $\triangle PCA = \frac{2}{7} S_2$

$\triangle PQR = \triangle ABC - (\triangle QAB + \triangle RBC + \triangle PCA)$  であるから

$$S_1 = S_2 - \frac{2}{7} S_2 \times 3 = \frac{1}{7} S_2$$

よって  $S_1 : S_2 = 1 : 7$