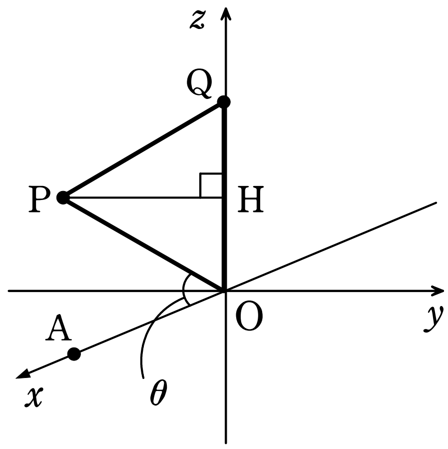
回転体の体積③（解答編）

解答　(1)　点Pから線分OQへ垂線を下ろし，線分OQとの交点をHとする。



△OPQは1辺の長さが1の正三角形であるから

$$\mathrm{OH}=\frac{1}{2},\ \mathrm{PH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，点Pは平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 上の，中心 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の円周上を動く。

ゆえに，点Pの座標は $0^\circ \leqq \phi < 360^\circ$ として

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi,\ \dfrac{1}{2}\right)$ で表される。

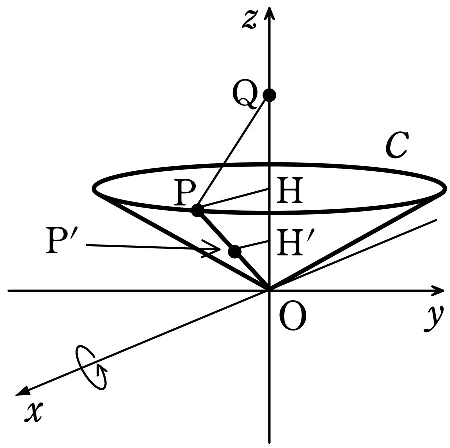
よって，点Pの x 座標を p_x とすると，p_x のとりうる値の範囲は　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq p_x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ であるから　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi$

$0^\circ \leqq \phi < 360^\circ$ から　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ から，θ のとりうる値の範囲は　$30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$

(2)　点Qの座標が $(0,\ 0,\ 1)$ のとき，辺OPが通過しうる範囲は，右の図のような原点Oを頂点とし，底面の円の半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，高さ $\dfrac{1}{2}$ の直円錐の側面である。　この円錐を C とする。



辺OP上に z 座標が t である点P′をとり，点P′から線分OQへ垂線を下ろし，線分OQとの交点をH′とする。

△P′OH′ は ∠P′OH′ $=60^\circ$，∠P′H′O $=90^\circ$ の直角三角形であるから　$\mathrm{P'H'}=\mathrm{OH'}\tan 60^\circ=\sqrt{3}\,t$

したがって，点Qの座標が $(0,\ 0,\ 1)$ のとき，点P′は平面 $z=t$ 上の中心H′，半径 $\sqrt{3}\,t$ の円周上を動く。

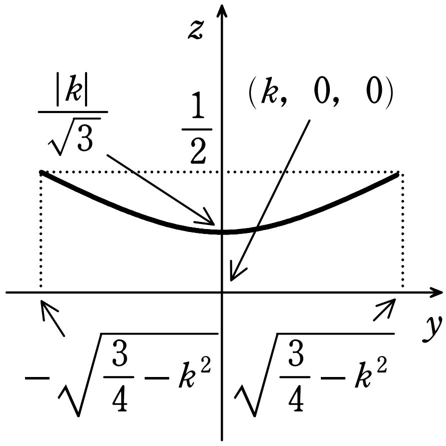
よって，点P′の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると　$x^2+y^2=(\sqrt{3}\,z)^2$　$\left(0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}\right)$

すなわち $x^2+y^2=3z^2$ $\left(0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ ……① が成り立つ。

OQ＝1であるから，点Qは平面 $x=0$ 上を動くとき，この平面上の，中心O，半径1の円周上を動く。

よって，K は円錐 C の側面を x 軸の周りに 1 回転させた立体である。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ として，平面 $x=k$ による円錐 C の



断面は①に $x=k$ を代入して　　$k^2+y^2=3z^2$

すなわち，右の図のような曲線の一部になる。

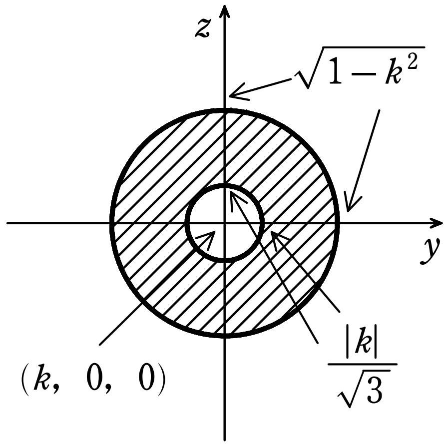
曲線上の点で点 $(k,\ 0,\ 0)$ から最も遠い点は

$\left(k,\ \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}-k^2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で，その距離の 2 乗は

$$\left(\pm\sqrt{\frac{3}{4}-k^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-k^2$$

また，最も近い点は $\left(k,\ 0,\ \dfrac{|k|}{\sqrt{3}}\right)$ で，その距離の 2 乗は

$$\left(\frac{|k|}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{k^2}{3}$$



以上から，平面 $x=k$ による K の断面は，右の図の斜線部分である。

この面積を $S(k)$ とすると

$$S(k)=\pi(1-k^2)-\pi\cdot\frac{k^2}{3}=\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)$$

したがって，求める体積を V とすると

$$V=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} S(k)\,dk=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk=2\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$