（共通テスト対策 ⑰）

問題　xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を C とする。点 $\mathrm{P}(-2,\ -5)$ を通り，放物線 C に接する 2 つの直線を ℓ_1，ℓ_2 とする。直線 ℓ_1，ℓ_2 の傾きをそれぞれ m_1，m_2 $(m_1<m_2)$ とし，放物線 C と 2 直線 ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を S とする。

(1)　直線 ℓ_1，ℓ_2 の方程式を求めよ。

(2)　放物線 C と直線 ℓ_1，ℓ_2 の接点をそれぞれ $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とするとき，a，b の値を求めよ。

(3)　面積 S を求めよ。

解答　(1)　$y'=2x$ であるから，放物線 C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)\quad すなわち\quad y=2tx-t^2$$

この直線が点 P を通るとすると　　$-5=-4t-t^2$

よって　　$t^2+4t-5=0$

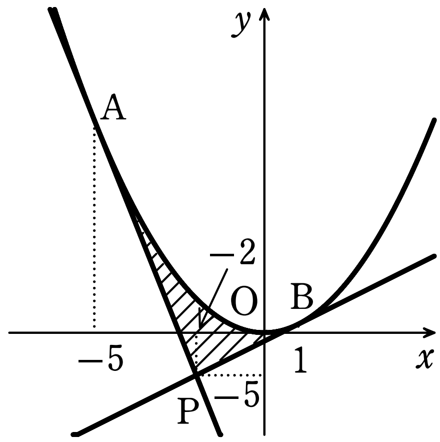
ゆえに　　$(t-1)(t+5)=0$

よって　　$t=-5,\ 1$

したがって，求める直線の方程式は　　$\ell_1: y=-10x-25$，$\ell_2: y=2x-1$

(2)　(1) から　　$a=-5$，$b=1$

(3)　右の図から，求める面積 S は



$$\int_{-5}^{-2}\{x^2-(-10x-25)\}dx+\int_{-2}^{1}\{x^2-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-5}^{-2}(x+5)^2dx+\int_{-2}^{1}(x-1)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x+5)^3}{3}\right]_{-5}^{-2}+\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{-2}^{1}=18$$