発展的な因数分解の公式

因数分解の勉強の最後に、入試等で良く出題される発展的な因数分解の公式について学びます。その公式とは $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ という式です。詳しく説明しますから、是非、マスターして下さい。

問題　$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解しなさい。

解答　$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a^3+b^3)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=\{(a+b)^3+c^3\}-3ab\{(a+b)+c\}$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ca-bc+c^2)-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-bc-ca-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

補足　以前に「対称式」という言葉が出てきたことを記憶している人もいると思いますが、「対称式」とは、使われている文字が全て同等に扱われている式のことをいいます。たとえば、a^2+b^2 や a^2+ab+b^2，$a^3+a^2b+ab^2+b^3$ などは全て a と b についての対称式と言えます。対称式には「対称式は基本対称式で表せる」という数学上の定理があり、a と b についての「基本対称式」は $a+b$ と ab にあたります。

たとえば、a^2+b^2 の場合は、$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 、a^3+b^3 の場合は、$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ と表せます。

a と b と c の３つの文字の場合の基本対称式は、$a+b+c$ と $ab+bc+ca$ と abc の３つで、$a^3+b^3+c^3-3abc$ も対称式の仲間と言えるので、

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}$　のように、当然、基本対称式で表すことが可能です。