（入試演習）　　　　　空間ベクトル③

問題　四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=\sqrt{5}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ とする。辺OAの中点をDとし，点P，Qをそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ $(0\leqq s\leqq 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ となるようにとり，線分PQの中点をRとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を s，t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) s，t がそれぞれ $0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，点Rの存在範囲の面積を求めよ。

(3) 直線ORと面ABCの交点をSとする。△SAB，△SBC，△SCAの面積比が $8:7:6$ となるとき，s と t の値を求めよ。

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\vec{a}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\frac{1}{2}s\vec{a}+(1-s)\vec{c}$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\left(\frac{1}{4}s+\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{1}{2}(1-t)\vec{b}+\frac{1}{2}(1-s)\vec{c}$　……①

(2) ①を変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{4}s\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}t\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}s\vec{c}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)+s\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)+t\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$ とすると，点Eは線分BCの中点である。

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{ER}}=s\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)+t\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ となるように，点F，Gをとると

$$\overrightarrow{\mathrm{ER}}=s\overrightarrow{\mathrm{EF}}+t\overrightarrow{\mathrm{EG}}\quad(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ となる点Hをとると，点Rの存在範囲は，平行四辺形EFHGの周および内部である。

よって，求める面積を S とすると　$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}})^2}$　……②

ここで　$|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{a}-2\vec{c}|^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{c}+4|\vec{c}|^2)=\frac{21}{16}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|^2=\left|\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right|^2=\frac{1}{4}|\vec{a}-\vec{b}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)=\frac{3}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{8}(\vec{a}-2\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$=\frac{1}{8}(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c})=0$$

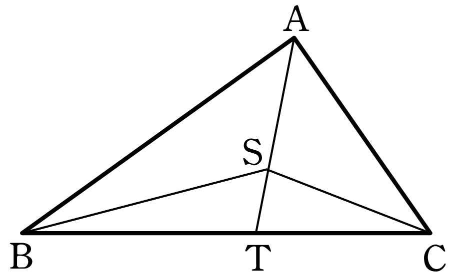
したがって，求める面積は，②より　$S=\sqrt{\frac{21}{16}\cdot\frac{3}{4}-0}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

(3)　直線ASと直線BCの交点をTとする。

このとき

$\mathrm{BT} : \mathrm{TC} = \triangle\mathrm{SAB} : \triangle\mathrm{SCA}$

$= 8 : 6 = 4 : 3$



また

$\mathrm{AT} : \mathrm{ST} = \triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{SBC}$

$= (8+7+6) : 7 = 3 : 1$

よって　$\mathrm{AS} : \mathrm{ST} = 2 : 1$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AT}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$

$$= \frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{8}{21}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{2}{7}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{8}{21}(\vec{c} - \vec{a})$$

$$= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{8}{21}\vec{c}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AS}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{7}\vec{b} + \dfrac{8}{21}\vec{c}$　……③

また，点Sは直線OR上の点であるから，kを実数とすると，①より

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = k\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left(\frac{1}{4}s + \frac{1}{2}t\right)k\vec{a} + \frac{1}{2}(1-t)k\vec{b} + \frac{1}{2}(1-s)k\vec{c} \quad \cdots\cdots ④$$

③，④より　$\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{7}\vec{b} + \dfrac{8}{21}\vec{c} = \left(\dfrac{1}{4}s + \dfrac{1}{2}t\right)k\vec{a} + \dfrac{1}{2}(1-t)k\vec{b} + \dfrac{1}{2}(1-s)k\vec{c}$

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから

$$\left(\frac{1}{4}s + \frac{1}{2}t\right)k = \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}(1-t)k = \frac{2}{7},\ \frac{1}{2}(1-s)k = \frac{8}{21}$$

これを解いて　$s = \dfrac{5}{17}$，$t = \dfrac{8}{17}$　$\left(\text{このとき}\quad k = \dfrac{68}{63}\right)$