（入試演習）　　ガウス記号と連続

問題　a を実数とする。関数 $f(x)$ を次のように定める。　　$f(x)=1-x+x^2+a[x]-2x[x]+[x]^2$

ただし，実数 x に対し，記号 $[x]$ は $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を表す。たとえば　$[0]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$ である。

(1)　$0 \leqq x < 1$ の範囲において，$f(x)$ を x の整式で表せ。

(2)　$1 \leqq x < 2$ の範囲において，$f(x)$ を a を用いた x の整式で表せ。

(3)　$f(x)$ が $x=1$ で連続であるように，a の値を定めよ。

(4)　$f(x+1)-f(x)$ を a を用いて表せ。ただし，$[x+1]=[x]+1$ であることは証明せずに用いてよい。

(5)　a を (3) で定めた値とする。n を正の整数とするとき，$\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$ を n を用いて表せ。

問題　(1)　$0 \leqq x < 1$ のとき，$[x]=0$ であるから　　$f(x)=1-x+x^2$

(2)　$1 \leqq x < 2$ のとき，$[x]=1$ であるから

$$f(x)=1-x+x^2+a-2x+1^2=x^2-3x+a+2$$

(3)　$f(x)$ が $x=1$ で連続であるための条件は　　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$

(1)，(2) から　　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(1-x+x^2)=1$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x^2-3x+a+2)=a$$

$$f(1)=1^2-3\cdot 1+a+2=a$$

よって　　$a=1$

(4)　$f(x+1)=1-(x+1)+(x+1)^2+a[x+1]-2(x+1)[x+1]+[x+1]^2$

$$=1-(x+1)+(x+1)^2+a([x]+1)-2(x+1)([x]+1)+([x]+1)^2$$

$$=1-x+x^2+a[x]-2x[x]+[x]^2+a-1=f(x)+a-1$$

よって　　$f(x+1)-f(x)=a-1$

(5)　$a=1$ のとき，(4) より，任意の実数 x に対して　　$f(x+1)=f(x)$

よって，$f(x)$ は周期 1 の周期関数であるから，任意の整数 k に対して

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$$

したがって，n が正の整数であることに注意すると

$$\int_0^n f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 f(x)\,dx=n\int_0^1(1-x+x^2)\,dx$$

$$=n\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{5}{6}n$$