平方根とその性質

『平方根とは』

たとえば、「4 の平方根を求めよ」という問題が出されたとします。4 の平方根とは、2 乗して 4 になるものを意味しますから、$2\times2=4$ 、また $(-2)\times(-2)=4$ より、2 乗して 4 になるものには 2 と -2 があることが分かります。
従って、4 の平方根は ±2 となります。

では、「5 の平方根を求めよ」と言われたらどうでしょう。5 の平方根には、正の数と負の数があることが分かりますが、それを 4 の平方根のように、すぐさま $\pm$ □ というわけには行きません。あるアフリカ系アメリカ人に「君のルーツは何だ」と尋ねる場合のように、物事の元や根源を表す言葉にrootという英単語を使いますが、その頭文字の r を記号化して、5 の正負２つの平方根を $\pm\sqrt{5}$ と表します。つまり $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ となりますし、また、
$(-\sqrt{5})\times(-\sqrt{5})=5$ となります。

『平方根の性質』

上の説明から $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ 、$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ が成り立ちますから

$(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})=(\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3})=2\times3=6$ となり、また、$\sqrt{6}\times\sqrt{6}=6$ となることを利用すると、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ が成り立つと分かります。

これを一般的に表すと、「a , b が共に正の場合、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ が成り立つ」と言えます。更に、これを利用すると「a , b は共に正の場合、$\sqrt{ab}\div\sqrt{b}=\sqrt{a}$ あるいは、$\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{ab}{b}}=\sqrt{a}$ が成り立つ」と言えます。

『平方根の計算 ①』… ルートの中を簡単にする方法

上の「平方根の性質」を利用すると、$\sqrt{12}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ が成り立つことが分かりますが、$\sqrt{□}$ の□の部分を素因数分解（素数とは、正の約数を1と自分自身しか持たない自然数のことで、たとえば2の約数は 1 とそれ自身の 2 しかありませんから 2 は素数と言えますが、6 は1 と 6 以外に 2 と 3も正の約数に持つので素数ではありません。「素因数分解」とは、ある自然数を素数の積の形で表すことをいいます。）した時、同じ数字が2個ある毎に $\sqrt{}$ の外に出すことが出来ます。

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ 以外にも、$\sqrt{72}=\sqrt{2^3\times3^2}=6\sqrt{2}$ や、$\sqrt{50}=\sqrt{2\times5^2}=5\sqrt{2}$ などの例をあげることが出来ます。

『平方根の計算 ②』… 分母の有理化

$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ など、分母の無理数のルートを取ることを「分母の有理化」と言いますが、その方法には約分の逆の操作を行い　$\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ とします。ただ、分母のルートの中の数字が大きい場合、いきなり分母を有理化せず、まず、分母のルートの中の数をなるべく外に出し、必要最小限の無理数を分母と分子に掛けます。たとえば、

$\dfrac{5}{\sqrt{12}}=\dfrac{5}{\sqrt{2^2\times3}}=\dfrac{5}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ のようにします。

平方根とその性質

（分母の有理化の応用例）

例題 $\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。

解答 この例のように分母に無理数の和や差がある問題では $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の展開公式を利用します。

$\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{4\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\dfrac{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}=2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ となりますね。

注 $\dfrac{5}{3-\sqrt{7}}$ などの場合もやり方は同じで、この例では分母分子に $3+\sqrt{7}$ を掛けます。

発展 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

方針 分母に $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}$ のタイプの無理数がある場合は、

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{a+b}$ と見なして、分母分子に $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{a+b}$ を掛けます。

解答 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{1\times\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$