置換積分の基礎②

by Aokijuku

今回は置換積分の定積分を学びます。早速、問題を解いて見ましょう。

問題 ① $\int_1^2 (x^2+3x-1)^3(2x+3)dx$

解答 $x^2+3x-1=t$ とおいて、両辺を t で微分すると $(2x+3)\dfrac{dx}{dt}=1$ $\therefore \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2x+3}$

ここまでは不定積分の場合と同じですね。大切なのはこの後です。それは何かというと、もとの定積分では xの範囲が1から2までですが、勿論、 $x^2+3x-1=t$ と置き換えましたから、当然、積分する範囲は異なります。そこで、 x と t の対応表を作ります。この場合、対応表は

x	$1\to 2$
t	$3\to 9$

となります。

このとき $\displaystyle\int_1^2 (x^2+3x-1)^3(2x+3)dx=\int_3^9 t^3(2x+3)\frac{dx}{dt}dt=\int_3^9 t^3(2x+3)\frac{1}{2x+3}dt=\int_3^9 t^3dt$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_3^9=\frac{1}{4}(9^4-3^4)=\frac{1}{4}\times 3^4(3^4-1)=\frac{1}{4}\times 81\times 80=81\times 20=1620$$

問題 ② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$

解答 $\sin x=t$ とおいて、両辺を t で微分すると $\cos x\dfrac{dx}{dt}=1$ $\therefore \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\cos x}$ また

x	$0\to\dfrac{\pi}{2}$
t	$0\to 1$

このとき $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx=\int_0^1 t^3\cos x\frac{dx}{dt}dt=\int_0^1 t^3\cos x\frac{1}{\cos x}dt=\int_0^1 t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$

問題 ③ $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\log x(\log x+1)}$

解答 $\log x=t$ とおいて、両辺を t で微分すると $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=1$ $\therefore \dfrac{dx}{dt}=x$ また

x	$e\to e^2$
t	$1\to 2$

このとき $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\log x(\log x+1)}=\int_1^2\frac{1}{xt(t+1)}\frac{dx}{dt}dt=\int_1^2\frac{x}{xt(t+1)}dt=\int_1^2\frac{dt}{t(t+1)}=\int_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$=\Big[\log|t|-\log|t+1|\Big]_1^2=\log 2-\log 3-(\log 1-\log 2)=2\log 2-\log 3$$

問題 ④ $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)e^{x^2+x}dx$

解答 $x^2+x=t$ とおいて、両辺を t で微分すると $(2x+1)\dfrac{dx}{dt}=1$ $\therefore \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2x+1}$ また

x	$0\to 2$
t	$0\to 6$

このとき $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)e^{x^2+x}dx=\int_0^6 (2x+1)e^t\frac{dx}{dt}dt=\int_0^6 (2x+1)e^t\frac{1}{2x+1}dt=\int_0^6 e^t dt=\Big[e^t\Big]_0^6=e^6-1$