

指数計算と展開の意味について

【指数計算のルール】

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(説明) たとえば、 $a^3 \times a^2$ を考えると、これは $(a \times a \times a) \times (a \times a)$ のことですから、合計5個の a 掛け合わせているので、 $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$ となります。

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(説明) たとえば、 $a^5 \div a^2$ は $\frac{a^5}{a^2}$ のことですから、 $\frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a \times a = a^3$ となり、 $a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a^3$ となります。

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

(説明) たとえば、 $(a^2)^3$ は $a^2 \times a^2 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$ 、つまり $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$ となります。

例題 $(-2ab^2)^3$ を計算せよ。

解答 $(-2ab^2)^3 = (-2ab^2) \times (-2ab^2) \times (-2ab^2) = -8a^3b^6$

【展開とは】

具体的な例を使って説明しましょう。 $(a+2)(b-5)$ を例として説明すると、展開とは各カッコから、それぞれ項を1つずつ取り出し、それを掛け合わせることを総当たりので行うことです。ですから、

$$(a+2)(b-5) = ab - 5a + 2b - 10 \quad \text{となります。}$$

更に式の特徴を考えながら展開すると、より効率的に展開を行うことができます。たとえば、

$(2x+y)(3x^2-xy+2y^2)$ の展開を行ってみましょう。前のカッコの中身は $2x+y$ で、これは x, y についての一次式です。後ろのカッコの中身は $3x^2-xy+2y^2$ で、これは x, y についての二次式です。この2つを掛けると x, y の三次式となり、候補として考えられるのは、係数を無視すれば、 x^3, x^2y, xy^2, y^3 の4種類が考えられます。

x^3 の項については、 $2x$ と $3x^2$ を掛け合わせる場合しかありませんから、 $6x^3$ となります。 x^2y の項については、 $2x$ と $-xy$ を掛け合わせる場合と、 y と $3x^2$ を掛け合わせる場合がありますから、両者を合わせて xy^2 となります。更に xy^2 の項については、 $2x$ と $2y^2$ を掛け合わせる場合と、 y と $-xy$ を掛け合わせる場合がありますから、両者を合わせて $3xy^2$ となります。最後に y^3 の項については、 y と $2y^2$ を掛け合わせる場合しかありませんから、 $2y^3$ となります。以上より、 $(2x+y)(3x^2-xy+2y^2) = 6x^3 + xy^2 + 3xy^2 + 2y^3$ となりますね。

この考え方は、一見面倒に思えますが、一旦慣れると、公式は使わなくても展開を素早く正確に出来るようになりますので、是非、多くの問題にあたって練習してみてください。