（共通テスト対策②）

問題 (1) 自然数 n で n^2-1 が素数になるものをすべて求めよ。

(2) $0 \leqq n \leqq m$ を満たす整数 m，n の組 $(m,\ n)$ で，$3m^2+mn-2n^2$ が素数になるものをすべて求めよ。

(3) 0 以上の整数 m，n の組 $(m,\ n)$ で，$m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$ が素数になるものをすべて求めよ。

解答 (1) $n^2-1=(n-1)(n+1)$

よって，n^2-1 が素数となるためには，$n-1=1$ となることが必要である。

このとき，$n=2$ から $n^2-1=3$ となり，n^2-1 は素数である。よって　$n=2$

(2) $3m^2+mn-2n^2=(m+n)(3m-2n)$

よって，$3m^2+mn-2n^2$ が素数となるためには，$m+n=1$ または $3m-2n=1$ となることが必要である。

[1] $m+n=1$ のとき

$0 \leqq n \leqq m$ から　$(m,\ n)=(1,\ 0)$

このとき，$3m-2n=3$ であるから　$3m^2+mn-2n^2=3$　となり，$3m^2+mn-2n^2$ は素数である。

[2] $3m-2n=1$ のとき

$m=\dfrac{1}{3}(2n+1)$ であるから $n \leqq m$ より　$n \leqq \dfrac{1}{3}(2n+1)$　すなわち　$0 \leqq n \leqq 1$　ゆえに　$(m,\ n)=(1,\ 1)$

このとき，$m+n=2$ であるから　$3m^2+mn-2n^2=2$　となり，$3m^2+mn-2n^2$ は素数である。

[1]，[2] から　$(m,\ n)=(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$

(3) $m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$

$=m^4-3(n^2+2)m^2-4(n^4+4n^2+4)=m^4-3(n^2+2)m^2-4(n^2+2)^2=(m^2-4n^2-8)(m^2+n^2+2)$

$m^2-4n^2-8<m^2+n^2+2$ であるから，$m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$ が素数となるためには，

$m^2-4n^2-8=1$ であることが必要である。　このとき，$m^2-4n^2=9$ から　$(m-2n)(m+2n)=9$

$m-2n \leqq m+2n$，$m+2n \geqq 0$ であるから

$(m-2n,\ m+2n)=(1,\ 9)$，$(3,\ 3)$　　よって　$(m,\ n)=(5,\ 2)$，$(3,\ 0)$

$(m,\ n)=(5,\ 2)$ のとき　$m^2+n^2+2=31$　　$(m,\ n)=(3,\ 0)$ のとき　$m^2+n^2+2=11$

ゆえに，いずれの場合も $m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$ は素数となる。

したがって　$(m,\ n)=(5,\ 2)$，$(3,\ 0)$